

科普閱讀概論（國中篇）  
學習數學的另類方法：閱讀與敘事

洪萬生

台灣數學博物館 (MTM)

台灣師範大學數學系退休教授

# 說「文」解「字」

- 說數學故事
- 數學敘事 (mathematical narrative) :  
**narratives which are intended to communicate or construct mathematical meanings.**
- 歷史敘事 (historical narrative)
- 文學敘事 (literature narrative)

科普講座計畫「科學講古」

# 科學史沙龍

► 2017.09.26(二)14:00 報到入場

臺灣大學思亮館國際會議廳

主持人 洪萬生 | 臺大、臺師大數學系兼任教授

你不知道的康熙皇帝：數學、知識與權力

– 蘇俊鴻 | 臺北市立第一女子高級中學數學教師

你不知道的朝鮮與日本：算士、算額與算學

– 英家銘 | 臺北醫學大學通識教育中心副教授

國立臺灣大學科學教育發展中心  
Center for the Advancement of Science Education

# 2017 台積電盃青年尬科學：看見數學

國立臺灣大學科學教育發展中心  
Center for the Advancement of Science Education

2017 台積電盃·  
**青年尬科學**

科普閱讀與科學短講競賽  
5/15開始報名!

<http://case.ntu.edu.tw/scinarrator/>

# 競賽指定書籍及影片

- 台大科學教育發展中心（CASE）主辦
- 主旨：從數學小說的閱讀過程中看見數學
- 徵文及初賽指定六本數學小說：
  - 《天地明察》、《丈量世界》、《爺爺的證明題》、《博士熱愛的算式》、《平面國》、《蘇菲的日記》
- 複賽與決賽指定影片：
  - 《數字搜查線》（NUMB3RS）第一季十三集

# 數學小說：一種新興文類

- 數學小說成為一個全新的文類（genre）：科普作家（含專業數學家）開始融數學的「真」與「美」為一體，與讀者分享有趣的認知活動之外的數學知識之美。
- 這種跨兩門文理學科極端的連結，即使在西方歷史上也相當罕見。
- 左端＝數學，右端＝文學，緊握兩端，遊走中間！
- 2010年諾貝爾文學獎桂冠頒給加拿大作家 Alice Munroe。她最得意的作品之一，是創作於2009年的短篇小說《太多幸福》，根據俄羅斯女數學家蘇菲亞·卡巴列夫斯基（Sophia Kovalevsky）的傳記所改寫而成。

閱  
讀  
筆  
記

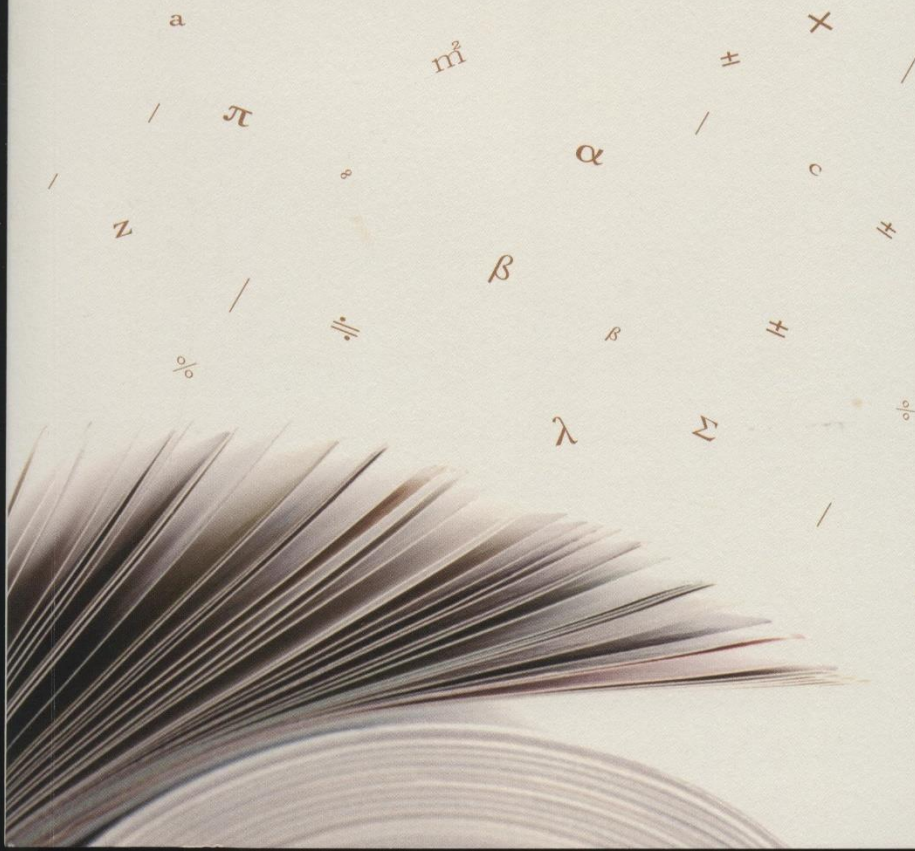
洪萬生 | 著

數 學 的 浪 漫

Mathematical  
novels  
Read notes

Mathematical romance

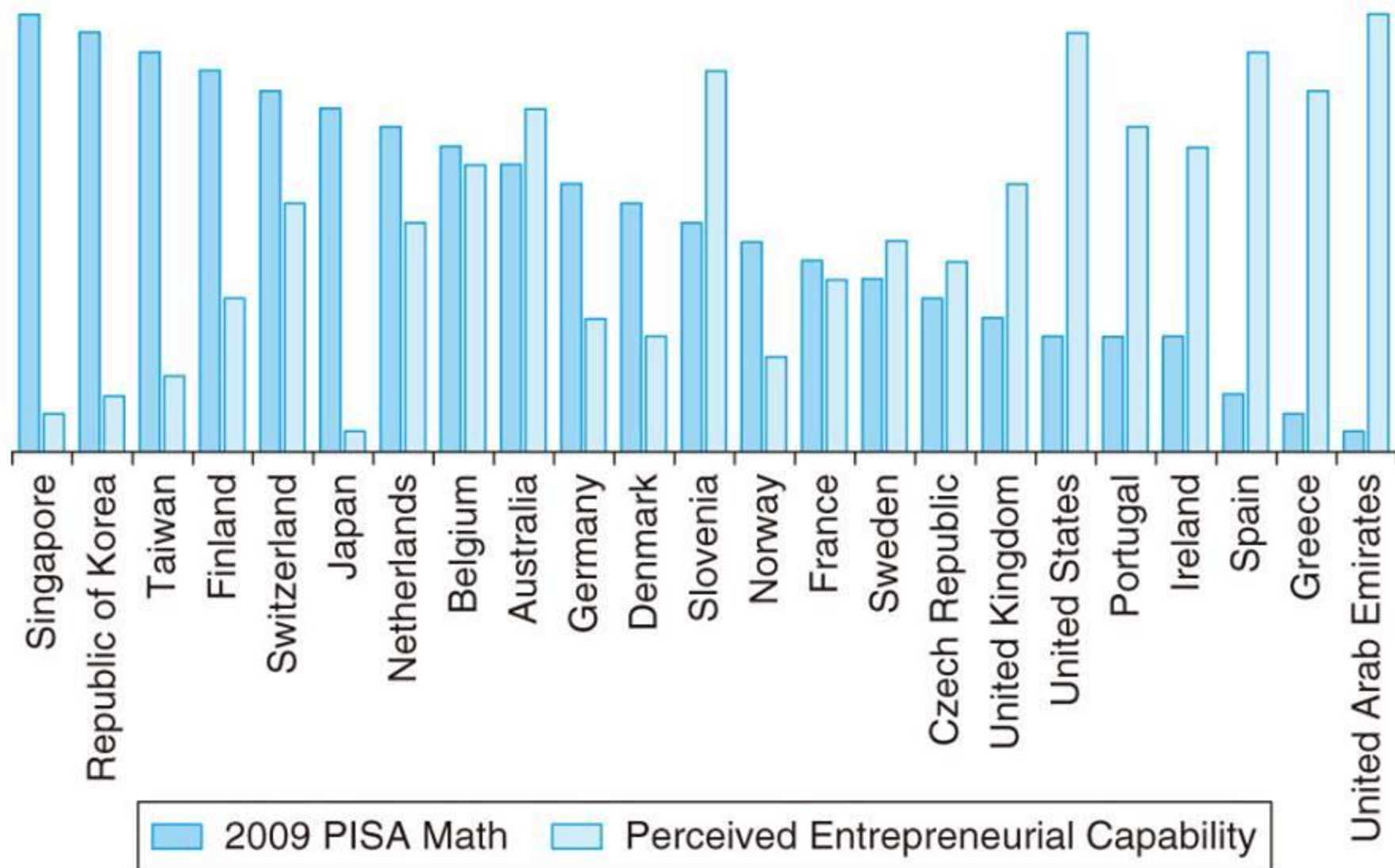
數  
學  
小  
說



# 終極目標：如何學習數學？

- 學習數學的多元面向：
  - (1) 生活經驗、(2) 歷史文化、(3) 文學創作
- 如何解讀「學習數學的多元面向」
  - (1) 學習「數學的多元面向」
  - (2) 「學習數學」的多元面向
- 數學學習：「敘事」與「閱讀」





**SOURCES:** Bosma, Wennekers, & Amorós, 2012; Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), 2010.

# 笛福 《魯賓遜漂流記》 (1719)

- 『歷險記』：撼動人心的漂流故事
  - 『遊記』：熱帶島嶼生活多姿多彩的描述
  - 『社會學』：十八世紀初西方人接觸原始部落的獨到研究。
  - 『小說』：逃避現實的驚險作品。
  - 『兒童文學』：在原始環境中生活，具有啟發性的故事。
  - 『神學』：身處異教邊陲的基督教徒的自我辯護之作。
  - 『經典作品』：西方文學的中流砥柱。
- 中譯版譯者郭建中：「不同時代的政治家、經濟學家、宗教人士、文史學家和文藝評論家，都可以從各個不同度解讀《魯賓遜漂流記》，但一般讀者，不論是青少年或中老年，都只把其作為一部冒險小說來閱讀而已。」

儘管講的都是同一本書 (*Daniel Defoe's Robinson Crusoe*)，各個領域卻都窮盡不了該部作品的廣大精微。

# X+Y 愛的方程式

繼【露西】後又一台北城市行銷跨國合作電影！

阿薩巴特菲爾德 《戰爭遊戲》  
瑞夫史波 《少年Pi的奇幻漂流》  
莎莉霍金斯 《藍色茉莉》  
艾迪瑪森 《無人出席的告別式》

即使是數學天才耗盡腦力也難以解決的...

**X+Y**  
愛的方程式

4/2  
有愛,就不孤獨



# 數學少女

Mathematical Girls  
Fermat's Last Theorem

費馬最後定理

原作 結城浩  
Hirosaki Yuki

漫畫 春日旬  
Spring Kaanga



TONG LI COMICS

1



正式授權中文版



# 神通小偵探

加藤元浩  
Motohiro Katou



Volume. **38**

# 數學普及書籍舉例

- 《博士熱愛的算式》（小川洋子）
- 《蘇菲的日記》(Dora Musiek)
- 《質數的孤獨》(Paulo Giordano)
- 《數學女孩：伽羅瓦理論》(結城浩)
- 《數學邏輯奇幻之旅》(漫畫)(Apostolos Doxiadis *et al*)
- 《數學的浪漫：數學小說閱讀筆記》（洪萬生）
- 《這才是數學》(Paul Lockhart)
- 《X的奇幻之旅》(Steven Strogatz)
- 《畢氏定理四千年》(Eli Maor)
- 《數說新語》（洪萬生等）
- 《數學教你不犯錯》（Jordan Ellenberg）
- 《學數學弄懂這39個數字就對了》（史都華 Ian Stewart）

# 數學普及讀物

- 數學小說
- 數學電影
- 數學詩
- 數學漫畫
- 數學繪本
- 趣味數學問題
- 數學魔術
- 數學知識或概念的演化史
- 數學與文化

# 閱讀何以重要？

- 法國高中會考的哲學考題
- 2001：科學知識會不會限制了我們對真實世界的認識？
- 2008：藝術會不會改變我們對於真實世界的認知？
  
- 閱讀的目的和經驗：資訊式的閱讀和文學式的閱讀。
- 小四：從學習閱讀（learning to read）轉向通過閱讀來學習（reading to learn）！



# 高涌泉：科學人

- 《科學》(Science) 2010年4月23日推出「科學、語言、讀寫能力」專輯，鼓吹：**閱讀、書寫與口語溝通能力**是科學素養重要的一環。
- 加州柏克萊大學校長皮爾遜：「只要評量學生學習與老師品質的主要方式是不具挑戰性的多重選擇題，則老師便很難在教室中冒險提倡藉由讀寫活動與實驗來探索科學的教學方法」，因為**多重選擇題「只適合用來考事實，而不適合用來考觀念與知識架構。」**

# 數學大驚奇！

- 《啟發每個人的數學小書》
- 假設有一條鋼環緊緊環繞著地球赤道，現在你將它移走，從一處切開來，額外接上一段10呎長的鋼條，這個新的鋼環會比原先的還要長10呎。你再把它重新放回赤道上，請問：這條鋼環與地球的空隙有多大呢？（提示：赤道一圈25000哩）
- 1. 一個6呎高的走過去
- 2. 一個人匍匐前進
- 3. 一張面紙剛剛好可以穿過

究竟出版

The Education of T.C. Mills: What modern mathematics means to you

# 啟發每個人的 數學小書

愛因斯坦愉悅推薦，  
經典長銷70年



我帶著愉悅的心情讀  
李伯的這本書，  
優美的例子和深具啟發的內容，  
相信這原創性十足的嘗試，  
必定贏得人們激賞。  
～愛因斯坦～

莉莉安·李伯 著 休·李伯 繪  
洪萬生、英家銘 譯

獻給所有時代，擁有好奇心的人們

1942年，長島大學數學系主任和藝術系主任夫婦，聯手創作了這本圖文數學小書。

1944年，它被美國國防部送往戰場，陪伴士兵們度過艱苦的戰時歲月。

經過70年歲月的淬鍊，它依然發光發熱，2011年還登上日本暢銷書排行榜。

所有愛看數學書、不看數學書的人，都從這本書得到啟發，不只懂了數學，更懂了人生！

哈佛大學教授 貝利·馬祖爾 專序推薦 台灣師範大學數學系前教授 洪萬生 導讀

# 是遊戲不是數學？

- 1089
- 123123
- 5279
- 高斯的同餘（congruence）概念
- 可除性概念（divisibility）
- 德國電影《丈量世界》

# 《丈量世界》：高斯與洪堡雙人傳

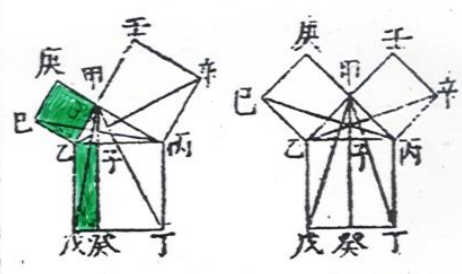


# 神童高斯的故事怎麼說？

- 《丈量世界》編導如何設計這個**插曲**？
- 在數學課堂上，如果你意在強調「**數學認知**」，那麼，你打算（要求學生）如何**重述或轉述**？
- 述說時不可忽略的**情節**（plot）是什麼？
- 這個**情節與數學**有何關係？

# 數學大驚奇！

- 《如何穿過一張明信片？》
- 用一張A4紙抵達月球
- A4紙的尺寸與 $\sqrt{2}$



丙丁戊直角方形木篇題言此形與甲乙邊上所作甲乙庚及甲丙邊上所作甲丙辛壬兩直角方形并等

論曰試從甲作甲癸直線與乙戊丙丁平

行本篇一分乙丙邊于子次自甲至下

至戊各作直線末自乙至辛自丙至己各

作直線其乙甲丙與乙甲庚既皆直角即庚甲甲丙是

同一直線本篇十四依顯乙甲甲壬亦一直線及丙乙戊與甲

乙乙既皆直角而每加一甲乙丙角即甲乙戊與丙乙

已兩角亦等公論依顯甲丙丁與乙丙辛兩角亦等又



# 《幾何原本》

- *The Elements*, David Joyce website:  
<http://www.math.clarku.edu/~djoyce>
- 畢氏定理的證明：I.47及VI.31
- 1607：徐光啟、利瑪竇合譯《幾何原本》  
（丁先生改編本）前六冊
- 1850年代：李善蘭、偉烈亞力合譯後九冊  
（根據英文版本）。

# 徐光啟〈幾何原本雜議〉

## 《幾何原本》的邏輯結構

學不無知言之功

凡人學問有解得一半者有解得十九或十一者獨幾何之學通卽全通蔽卽全蔽更無高下分數可論

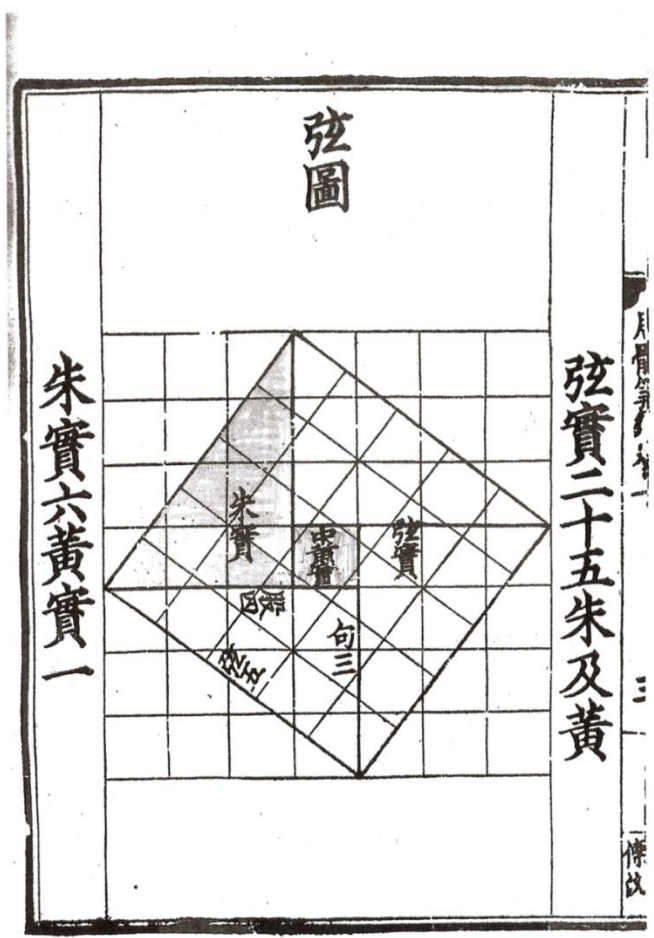
人具上資而意理疎莽卽上資無用人具中材而心思縝密卽中材有用能通幾何之學縝密甚矣故率天下之人而歸於實用者是或其所由之道也

此書有四不必不必疑不必揣不必試不必必有四不可得欲脫之不可得欲駁之不可得欲減之不可得欲前後更置之不可得有三至三能似至晦實至明故能以其明他物之至晦似至繁實至簡故能以其簡簡他

物之至繁似至難實至易故能以易易他物之至難易生于簡簡生于明綜其妙在明而已

此書爲用至廣在此時尤所急須余譯竟隨偕同好者梓傳之利先生作叙亦最喜其亟傳也意皆欲公諸人人令當世亟習焉而習者蓋寡竊意百年之後必人人習之卽又以爲習之晚也而謬謂余先識余何先識之有有初覽此書者疑與深難通仍謂余當顯其文句余對之度數之理本無隱奧至于文句則爾日推敲再四顯明極矣倘未及留意望之似與深焉譬行重山中四望無路及行到彼蹊徑歷然請假旬日之功一窺其旨卽知

# 三國時代趙爽注《周髀算經》



# 李銳《勾股算術細草》(1799)

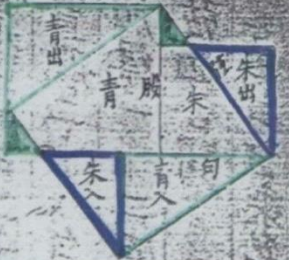
今有句二十一股二十八問弦幾何

答曰三十五

術曰二幕相加為實開平方得弦

草曰置句二十一自之得四百四十一為句幕又置股二十八自之得七百八十四為股幕二幕相加得一千二百二十五為實開平方得二十五即弦也合問

解曰句自乘為朱幕股自乘為青幕令出入相補



恰成一段弦幕故二幕相加開方得弦也

二十一

二十八

四百四十一

七百八十四

一千二百二十五

二十五

三十五

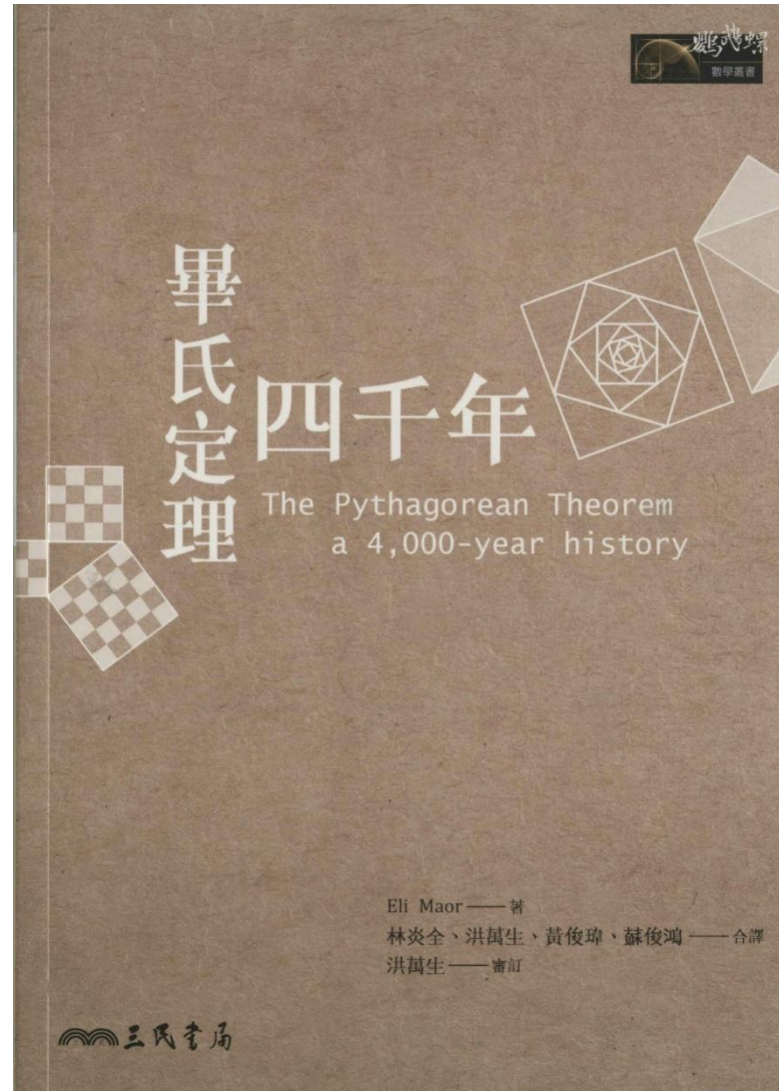
李銳

勾股算術細草

# 畢氏定理：如何證明？ vs. 如何說故事？

- 面積證法
- 比例證法
- 弦圖證法
- 各自特色為何？

# 毛爾 《畢氏定理四千年》



# 畢氏定理四千年：數學美與對稱性

- 所謂美，固然有其主觀性，然而一個定理或其證明如何才能被認為是美的呢？數學家自有他們的一套共識，一個至高無上的判準，那便是對稱性。
- 譬如說吧，考慮三角形的三條高：它們永遠交於一點（正如中線和分角線一樣）。

# 數學與民主！

- 這個命題給了三角形某種優雅，伴隨著它的全幅對稱性：沒有一個邊或頂點比起其他更具有優先性；在這些構成元素之中，有一種完全的民主 (complete democracy)。
- 或者，考慮這個定理：如果過圓內一點 $P$ ，畫出弦 $AB$ ，那麼，乘積 $PA \cdot PB$ 為定值。
- 這真是又一次完美的民主體現：對 $P$ 點來說，每條弦全然平等，不分地位孰高孰低。



# 數學的文學比喻

- 試證明此一圓冪定理。
- 這個比喻（metaphor）與此一定理的內容（content）有何關係？試簡要說明之。
- 這個定理的證明過程如何有助於你對於毛爾的比喻之理解？試簡要說明之。（證明如何賦予意義？如何與數學理解有關？）
- 反過來，毛爾的比喻對於這個定理的證明與意義是否有所幫助？試說明之。

# 保羅·拉克哈特



# 《這才是數學》論證明

- A **proof** is simply a **story**. The **characters** are the elements of the problem, and the **plot** up to you. The goal, as in any **literary fiction**, is to write a story that is compelling as a **narrative**. In the case of mathematics, this means that the plot not only has to make logical sense but also be simple and elegant. No one likes a meandering, complicated quagmire of a proof. We want to follow along rationally to be sure, but we also want to be charmed and swept off our feet aesthetically. **A proof should be lovely as well as logical.**

# 這才是數學

- **證明**就像在**說故事**。題目中的元素就是**人物角色**，**故事情節**則由你決定。就像任何一篇文學小說，我們的目標，是寫出在陳述上令人信服的故事。在數學上，這表示情節不僅要合乎邏輯，還必須是簡明而優雅。沒有人喜歡看拐彎抹角又複雜的證明。我們當然想看到理性的思路，但也希望感受到美的震懾。**一個證明應該兼顧美感與邏輯**。

# 舉例：這才是數學？！

- 作者保羅·拉克哈特在說明如何「量度」圓面積時，指出古典方法（如窮盡法）的如何深刻動人：
- 我們做的**近似值**並不只是少幾個，而是無窮多個。我們其實做了一連串無止境，一次比一次接近，而從這些近似值可以看出一種**模式**，告訴我們最終會趨向什麼結果。換句話說，**透露出某種模式的無窮多個「謊言」(lies)**，竟能告訴我們**真理 (truth)**。
- 「**謊言**」改為「**假話**」，上一段的意義有何不同？
- 三國時代，**劉徽**如何證明圓面積公式「半周半徑相乘得積步」：**既發現又證明**！

# 《九章算術》圓田術

今有圓田周三十步徑十步臣淳風等謹按術意以周三徑一為

率周三十步合徑十步今依密問為田幾何

答曰七十五步此於徽術當為田七十一步一百五十七

分步之一百三十一步臣淳風等謹依密

率為田七十一步

又有圓田周一百八十一步徑六十步三分步

之一臣淳風等謹按周三徑一周一百八十一

步徑六十步三分步之一依密率徑五十

分步之十三問為田幾何

答曰十一畝九十步十二分步之一

此於徽術當為田十畝二百八十三

百一十四分步之一百一十三臣淳風等謹依密率為田十畝二百五步八十八分步之八十七

術曰半周半徑相乘得積步

按半周為從半徑為廣故

廣從相乘為積步也假令圓徑二尺圓中  
 容六弧之一面與圓徑之半其數均等令  
 徑率一而弧周率三也又按為圖以六弧  
 之一面乘一弧半徑二因而六之得十二  
 弧之幕若又割之次以十二弧之一面乘  
 一弧之半徑四因而六之則得二十四弧  
 之幕割之彌細所失彌少割之又割以至  
 於不可割則與圓周合體而無所失矣弧  
 面之外猶有餘徑以面乘徑則幕出弧表  
 若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表  
 無餘徑則幕不外出矣以一面乘半徑弧  
 而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而為  
 圓幕此以周徑謂至然之數非周三徑一  
 之率也周三者從其六弧之環耳以推圓



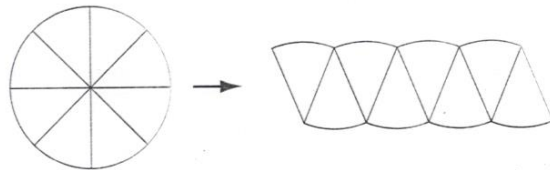
還有其他的  
方法可以計算圓  
的面積嗎？



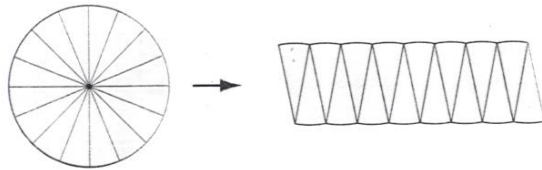
把圓切割平分後，  
再拼拼看。



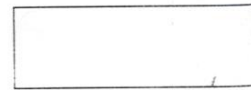
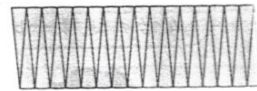
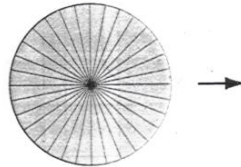
說說看，拼出來的圖形，看起來像什麼形狀？



把圓形分得越細，  
拼出來的圖形會有  
什麼變化？

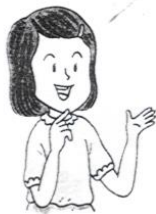


如果切得越細，拼  
出來的圖形就會越  
接近長方形。





把圓形分割拼湊以後，看起來很像是長方形。



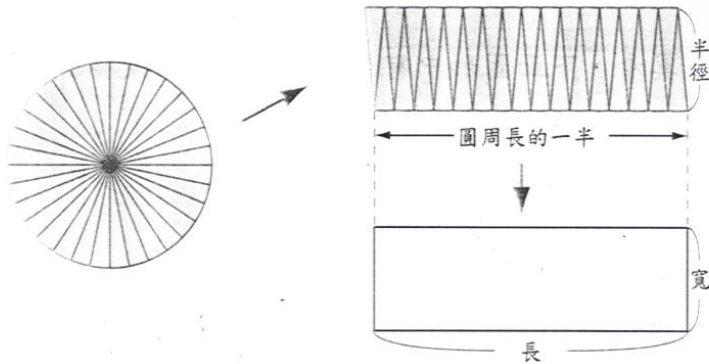
只要知道長和寬是多少，就可以算出長方形面積了。



那麼不就可以算出圓的面積了！



把拼湊的長方形和圓形比比看，長方形的長和寬是原來圓形的什麼變成的？



圓周長=直徑 $\times$ 3.14，  
所以長方形的長就是  
直徑 $\times$ 3.14 $\div$ 2  
也就是半徑 $\times$ 3.14

我知道了！  
那麼圓面積就是……



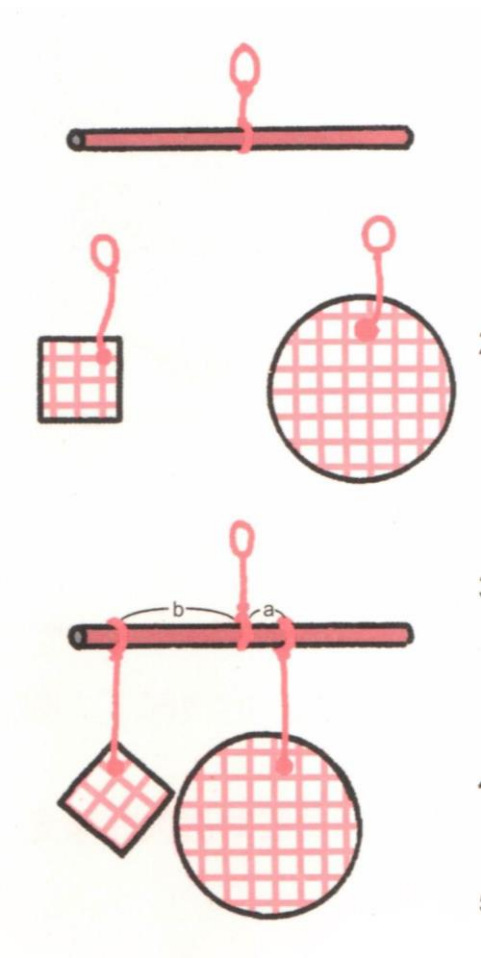
想一想，算一算：

半徑10公分的圓，面積是多少？ 圓面積=半徑 $\times$ 半徑 $\times$ 3.14

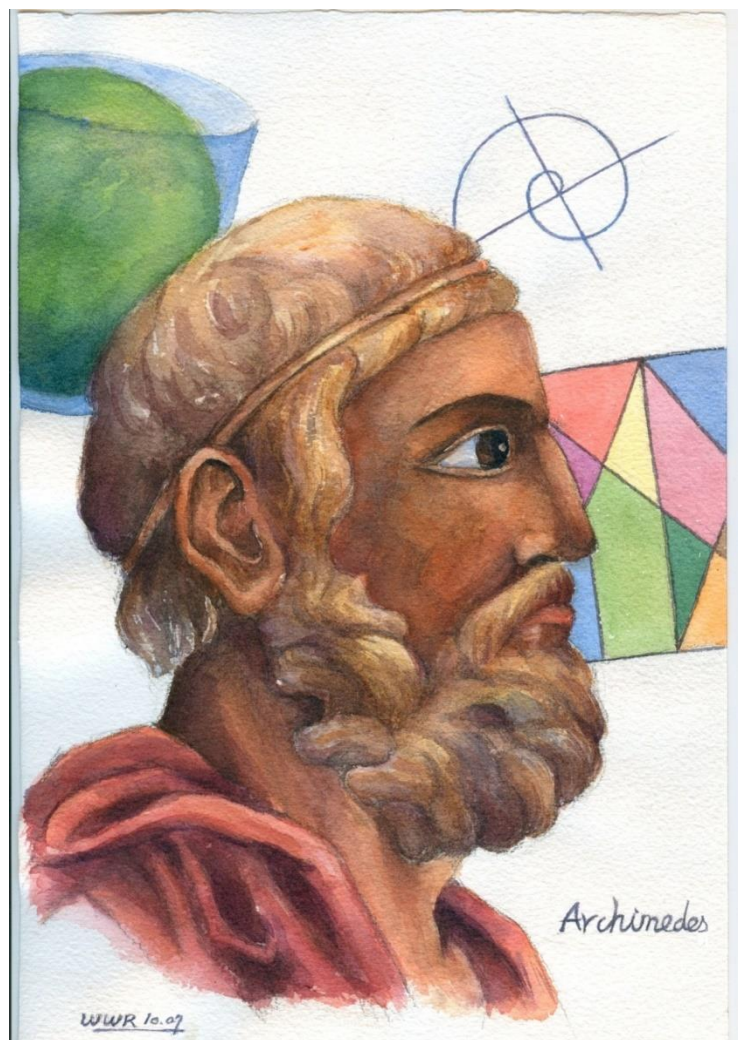
# 課本圖（示）說（明）討論

- 圓面積 = 半周 · 半徑
- 圓面積 = 3.14 · 半徑 · 半徑
- 哪一個比較容易說明？
- 哪一個是精確公式？
- 如何「各說各話」？
- 數學史的「介入」有沒有好處？

# 圖說一體：阿基米德的*Eureka*



# 吳宛柔（北市東湖國中數學老師）創作



# 如何鑑賞？如何討論？

- 為什麼提及阿基米德？
- *Eureka* 是什麼意思？
- 設計者的「教學」或知識普及目標為何？
- 本圖說之精妙處何在？設計者利用了哪些數學知識？又，如何引導觀看者的思維？

# 祖沖之如何計算3.141592？

- 祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈、朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七，周二十二。
- 先決條件：祖沖之知道圓周率（圓周除以直徑）是常數或定值嗎？我們如何確認？

# 敘事（說故事）與數學學習

- 史特格茲（Steven Strogatz）的現身說法：
- 在最近史特格茲所講授的一堂課上，他給每位學生一張紙（上面畫了不等邊三角形）及一把剪刀。當天的課程挑戰，是運用四種不同的方法，去證明一個數學想法。這個想法很簡單：所有三角形的內角和加起來等於180度（也被描述成加起來等於一個「平角」）。
- 史特格茲說：「剪掉三角形可能像是藝術或工藝課，而不像是大學的數學課」
- 「不過，它真地有助於以遊戲的精神探索數學。你做的事情就像你將正在研究的物件切開一樣粗魯，其實一點都沒有關係，因為它可以提供你一些想法。」

# 敘事與賦予意義

- 在這一堂課結束時，史特格茲鼓勵學生思考為何一個平角有180度。那是某種人們所發現的東西？還是發明的？
- 有一位主修非洲研究的學生Rush Imhotep回答：「（180）這個數目是隨意定奪的，可是在其背後的想法卻不是」，「這就像是人類的語言：儘管你創造文字去表現它們，但這些表現式卻是真實的東西。」
- 敘事與意義的賦予！
- 如何將直觀的勞作轉換成為認知與論證？
- 美術勞作 vs. 數學認知（譬如，形式證法的平行線如何被「發想」到的？



# 學習符號代數的認知障礙

- 國中學生 vs. 康熙皇帝
- 「固有認知」特性？
- 今古對照：康熙成為今日學生的對照組？
- 如何說這個（對照的）故事？
- 符號代數的歷史？

# 國中一年級學生的學習札記

- 時間：1995 年秋天
- 我每天都幾乎有一節數學，我每天都在看黑板，老師寫的，自己慢慢的看，算法怎麼算，所以每天幾乎都可以理解了幾題。
- 假如我有一個題目不懂，就去問○○○（按：某同學）怎麼做？他做一遍給我看，我再把我寫的這一題寫的想法，告訴○○○，他糾正我的寫法，我也慢慢的懂了。
- 我對數學有困難的是，不能容忍 $x, y, z$ 是個數字，並算出一個答案，這是自己面臨到的一個困難，無法突破。

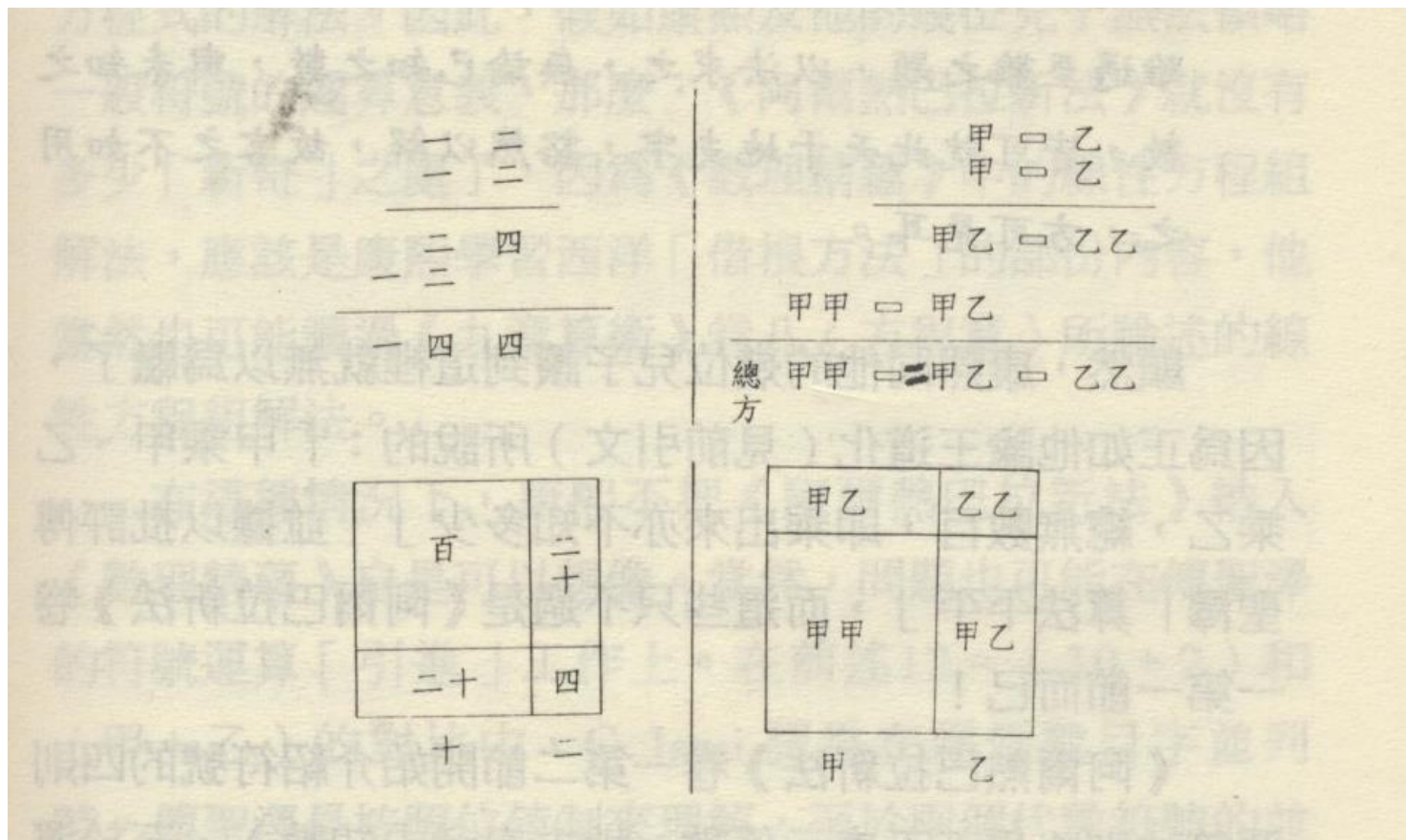
# 康熙 (1654-1722)



# 《掌故叢編》清聖祖諭旨

- 諭王道化：朕自起身以來，每日同阿哥等察《阿爾熱巴拉新法》，最難明白。他說比舊法易，看來比舊法愈難，錯處亦甚多，鶻突處也不少。前者朕偶爾傳於北京西洋人開數表之根，寫的極明白，爾將此諭抄出，並此書發到京裡去，著西洋人共同細察，將不通的文章一概刪去。還有言者：甲乘甲、乙乘乙，總無數目，即乘出來亦不知多少，看起來想是此人算法平平爾。

# 《阿爾熱巴拉新法》插圖複製



# 文言 vs. 白話？

- 阿爾熱巴拉（達）= algebra；阿爾朱八爾 = algebre
- 舊法 = 卡丹諾版 (Cardano's version) 西方代數，收入《數理精蘊》，稱之為「借根方比例法」
- 民國七十一年大專聯考「**中外歷史**」有一考題如下：誰發明了代數學？(1) 義大利人；(2) 中國人；(3) 阿拉伯人；(4) 印度人；(5) 英國人。
- **標準答案**：阿拉伯人。

# 借根方比例法

- 出自《數理精蘊》卷三十三，是十六世紀義大利卡丹諾（Girolamo Cardano）承自阿爾花拉子摩的「代數學」（al-jabr）。
- al-jabr → algebra，拉丁文本義是方程式的「還原」
- 設如有一平方多三十六尺，與十三根相等，問每一根之數幾何？
- 法以三十六尺為長方之積，十三根為和十三尺，用帶從和數開平方方法算之。將積數四因，與和自乘數相減，餘二十五尺，開平方得五尺為較，與和十三尺相減，餘八尺，折半得四尺，為一根之數，即長方之闊，加較五尺，得九尺，即長方之長也。
- 兩根之積 = 36，兩根之和 = 13。解法如下： $13 \cdot 13 - 4 \cdot 36 = 25$ ，兩根之較（差） =  $\sqrt{25} = 5$ 。 $(1/2)(13 - 5) = 4$  為一根之數。另一根為  $4 + 5 = 9$ 。
- 二次方程式的公式解法

# 舊法 vs. 新法

- 《阿爾熱巴拉新法》（傅聖澤（J.-F. Foucquet）講義）
- 或問：阿爾熱巴拉舊法乃最深遠之法也，何為又是新法，意必舊法猶有未善者歟？
- 答曰：舊法未嘗不善，但於通融之處，有所不及也，故又有新法濟之。
- 或問：舊法於通融之處有所不及，新法濟之，二法何以別乎？
- 答曰：新法舊法，其規大約相同。所以異者，因舊法所用之記號，乃數目之字樣，新法所用之記號，乃可以通融之記號，如西洋即用二十二字母，在中華可以用天干地支二十二字以代之，蓋之干字，皆人所習熟者，故用之之際，自無錯誤。



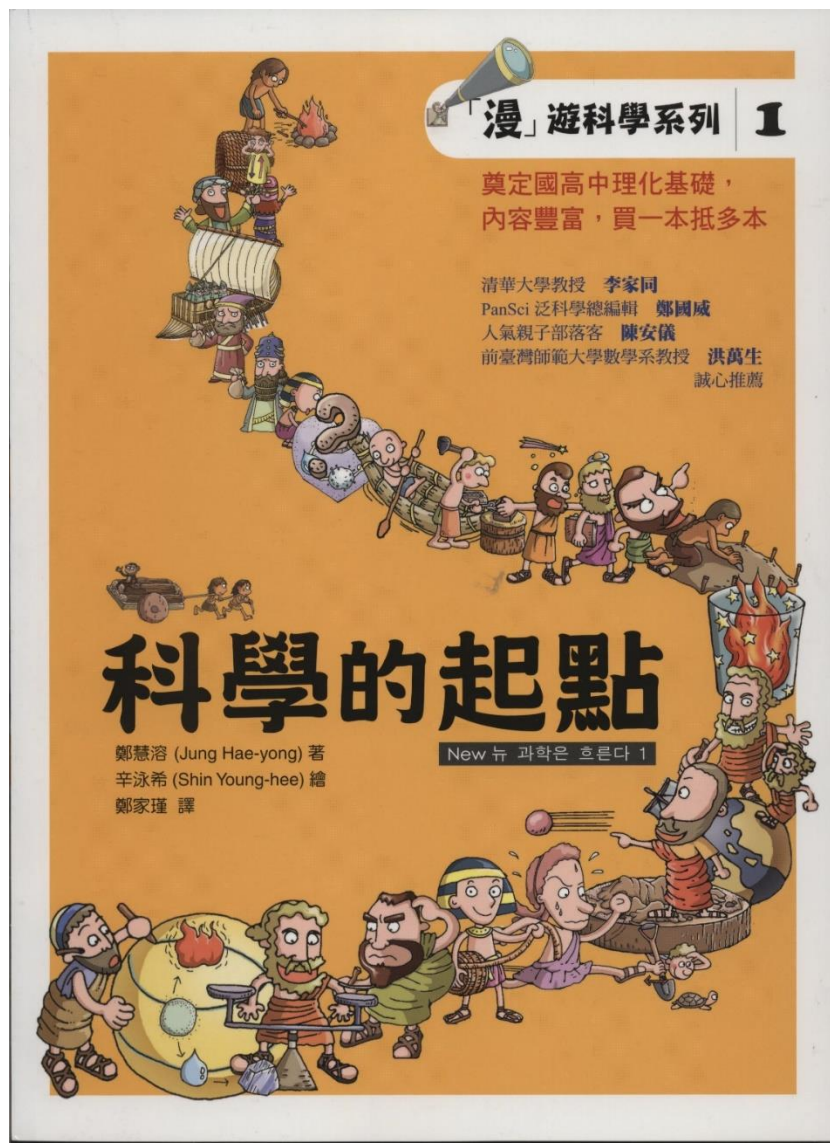
# 類比

- 小說家：小說情節中的數學知識活動  
(mathematical knowledge activities in plots of fiction)
- 數學史家：歷史脈絡中的數學知識活動  
(mathematical knowledge activities in historical context)
- 數學（教育）家：真實世界中的數學知識活動  
(mathematical knowledge activities in real world)
- 科普作家：數學普及敘事中的數學知識活動  
(mathematical knowledge activities in narrative of popular mathematical writing)
- 小說情節中的數學家 vs. 數學家傳記中的數學家

# 數學史：在脈絡中「讀」數學

- 研究數學知識演化 (evolution) 的一門跨領域 (interdisciplinary) 學問
- 此一演化過程一定涉及情境 (situation) 或脈絡 (context)
- 在脈絡中，探索數學知識如何變化或發展，乃是此一學問的天職
- 「半周半徑相乘」這個圓面積公式理所當然應該「放回」它所屬的歷史脈絡或處境來分析或討論，才可望獲得恰當的理解 (proper understanding)。
- 針對古代的數學知識，我們的「恰當理解」不只涉及史識 (a sense of history)，同時也需要數學洞察力 (mathematical insight)

用古人的「想法」和「方法」來思考！





所以我們在尋找的科學史就是由此時開始。

也就是從人類開始定居生活起。



從現在起，我們用古人的想法和方法來思考。

我們居住的大地是什麼樣子？

應該是平的，這樣我們才不會滾來滾去。



嘿嘿，3歲小孩也知道地球是圓的啊。

嘖嘖

覺得那些人很好笑吧。

但是萬一發生這種狀況，要怎麼辦呢？



地球是圓的這種蠢話，我第一次聽到。

咦？

年紀輕輕就……

嘖嘖……走啦！

有人報告說有瘋子！在哪裡？



# 如何欣賞數學與藝術之連結？

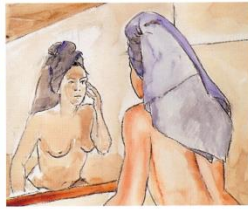
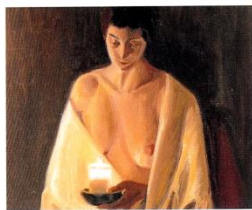
- 人體的比例
- 工業設計的工藝之美



# 人體

## Human Figure

- ◆ 西班牙專業藝術出版社Parramón精心製作
- ◆ 已發行英、美、法、德、荷、葡等多國版本
- ◆ 基礎而全面的繪畫知識與技巧
- ◆ 人體畫愛好者的最佳學習教本



## 身體各部位比例關係

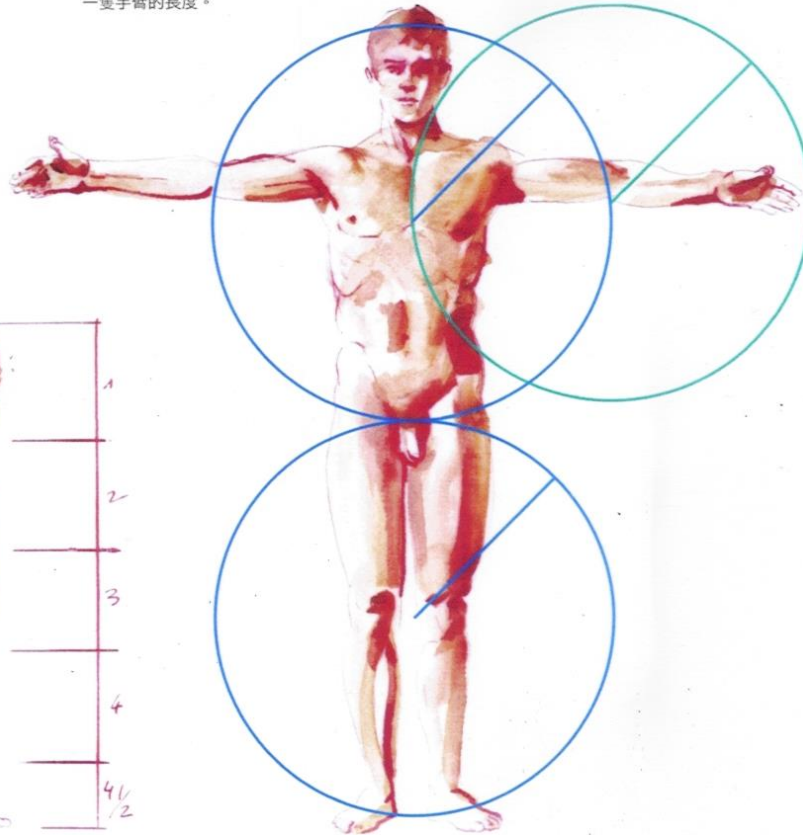
一個七頭半身的協調比例影響了人體其他各部位的尺寸。最理想的是，以人體的身高為直徑畫個圓，圓心正好落在恥骨部分，再以這部分分界，將全身畫成兩個圓，一個圓心正好位在胸骨，另一個則落在膝蓋的高度。把兩臂張開使身體呈十字狀，身體的長度正好等於寬度；而寬度的中心恰恰位在兩根鎖骨的中央，若以這點分界，畫成兩個圓，圓心會落在兩個肘關節。

### 手臂的長度

兩臂垂下時，手肘的高度約在腰部以下、臀部的位  
置；而手臂的總長度，即從鎖骨到中指尖端的長  
度，要等於鎖骨到腳底板長度的一半。此外，從頸  
部到頭頂的長度，應相當於手臂長度的一半。

人體最理想的中心點正好落在恥骨部分，而身高的一半正好等於一隻手臂的長度。

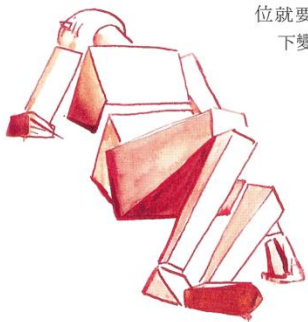
二至四歲幼童的身高，相當於四到五個頭部不等。這種「不成比例」的現象，完全是由於頭部發育與身體其他部分進度不同所致。





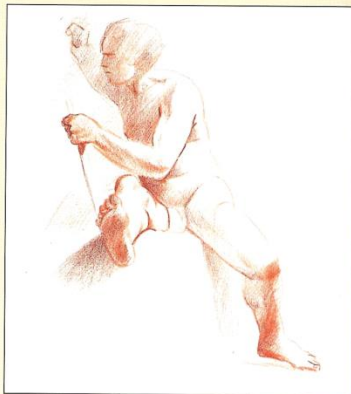
## 透視法

透視法就是對整個人體或人體的一部分做視覺上的預判。要想畫出透視圖必須經過一些練習，還要對人體的基本解剖圖形有所瞭解，因為透視就是對這些圖形的預先解析。任何人體畫多少都有一些部位，像是臉部、一條臂膀、一隻手等，是屬於透視範圍的。但這些透視圖形並不具什麼意義，只不過是對解剖學上的「正常」視覺做些修改而已，譬如當你從高處俯瞰人體，貼著地面觀察人體，或是以一個不尋常的角度看一隻手臂或一條腿時，人體的某些部位就要在合理的情況下變形。



## 透視畫的大師

在文藝復興和巴洛克時代，許多畫家運用他們精深的解剖學知識，高度運用透視法來表現人體，呈現出來的姿勢非常多樣，甚至有些很不自然。不同主題畫作中都充滿扭曲的人體，而這些人體都被賦與了新的量感概念。以在透視法中追求最大效果而聞名於世的兩位大師，分別是丁托雷多（Tintoretto）和魯本斯（Rubens）。



這幅人體畫的右腿是用透視法畫的。運用光影的強烈對比，使身體的這一部分顯得變形。

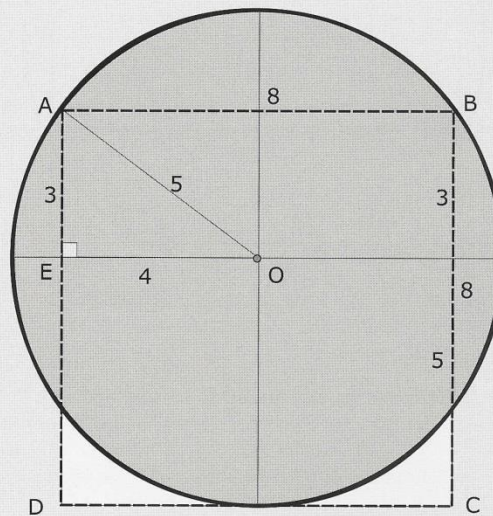
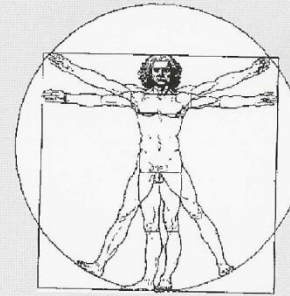
按照符合人體解剖學配置的圖解畫出的透視法人體畫，透視法壓縮了人體的實際體積。

FIG. 7-18 ~ PERIMETRIC QUADRATURE OF THE CIRCLE

Mercury square by Triangle 3-4-5.

Vitruvius's canon of proportion, made by Leonardo Da Vinci, is the famous drawing of a man inscribed in a circle and a square showing the relationships of his body to the golden section, expressing at the same time the perimetric quadrature of the circle.

The Macrocosmic circle is equal to the microcosmic square.



Consider square ABCD, side = 8.

On AD, place segment AE equal to 3 units.

The perpendicular to AD at E intersects the median of AB at point O.

The measure of EO is 4 and AO = 5.

You obtain the familiar triangle OEA (3-4-5), right-angled at E.

Draw the circle with O as center and  $OA = OB = 5$  as radius.

The circle with O as center has the following perimeter

$$2 \pi R = 2 \times 3.1416 \times 5 = 31.4$$

The perimeter of the square is  $4 \times 8 = 32$ .

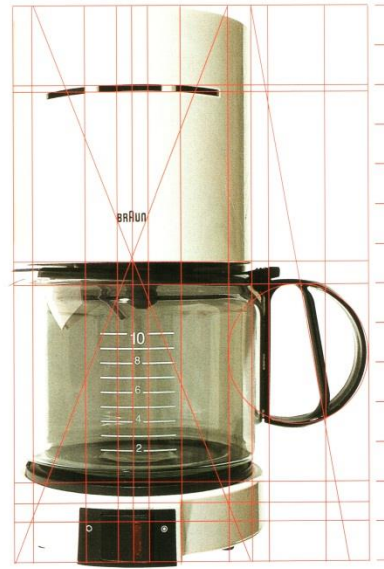
# 畢加索 〈三個樂師〉 (1921)



# 工業設計與數學

## 結構與比例

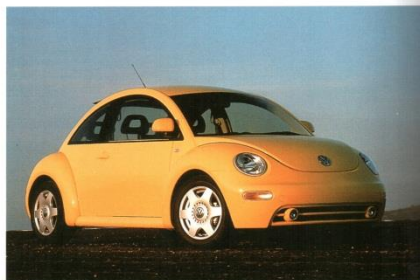
咖啡機的外觀可細分為一系列的規則區域，每個區域的位置，均仔細地與其他區域保持協調。廠牌標誌「BRAUN」的位置，稍高於產品中心點；咖啡機圓筒狀的外形，與把手正置弧的外形保持一致；而握把處的斜線，延伸對齊上方邊角（如圖）。這種元素間的對稱性，還可見於咖啡機下方的開關、咖啡壺刻度以及咖啡機上方的氣孔，三者的位置是對齊關係。



「福斯金龜車」(Volkswagen Beetle) 傑·梅司 (Jay Mays)、富力曼·湯馬斯 (Freeman Thomas)、彼得·希瑞爾 (Peter Schreyer) · 1997 年

福斯新款的金龜車不太像是交通工具，反而像是跑在馬路上一座極為生動的雕塑作品。與其他廠牌汽車截然不同的，它在視覺概念上將各種形式的表現，強烈地統合在一起，讓這部車不僅融合了幾何與懷舊的元素，更產生了一種既復古又未來的科技感。

整個車身可以適切地置入黃金橢圓上半部，側窗也重複使用黃金橢圓，車門則為黃金分割矩形的正方形部分，後車窗為二次黃金分割。車身表面各細節均為黃金橢圓切面或正圓形，甚至連天線的位置也位於前輪弧的切線角度上。



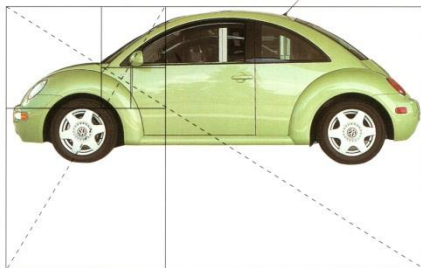
### 前視圖

從前方看這部車子，相當接近一正方形，所有元素均對稱排列。車蓋上的福斯標誌，位於正方形的中心點。

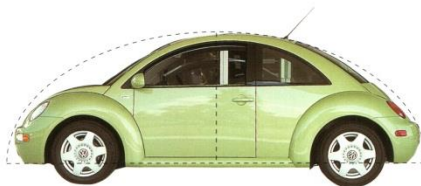


### 解析

右圖是黃金橢圓內接於黃金分割矩形的圖示，可看出整個車身剛好符合此黃金橢圓的上半部。黃金橢圓長軸對齊車身底部，穿過輪胎中心點的下方。

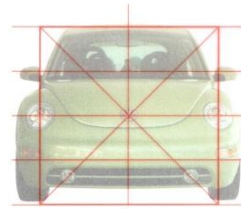


下圖為第二個黃金橢圓包住車身側窗，該橢圓與前輪外弧及後輪內弧相切，其長軸又與前後軸軸相切。



#### 前視圖

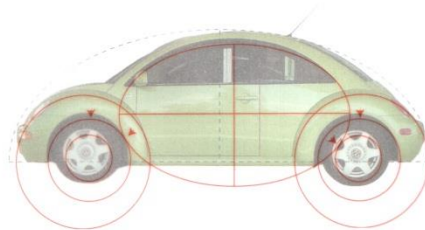
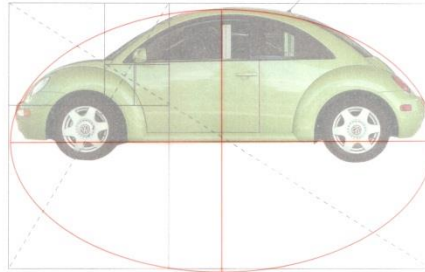
從前方看這部車子，相當接近一正方形，所有元素均對稱排列，車蓋上的福斯標誌，位於正方形的中心點。



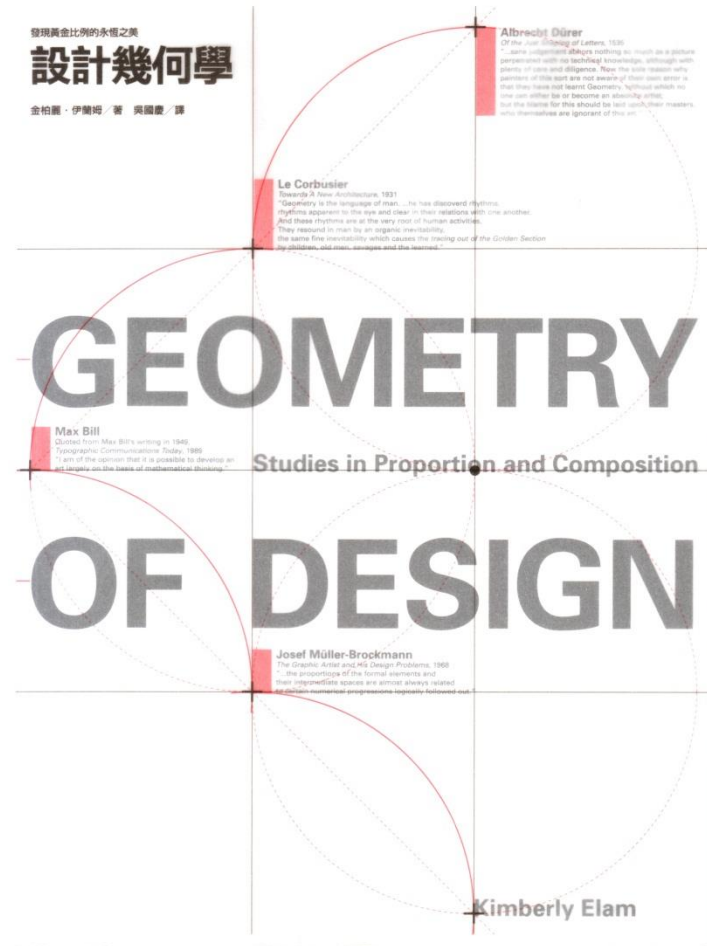
#### 解析

右圖是黃金橢圓內接於黃金分割矩形的圖示，可看出整個車身剛好符合此黃金橢圓的上半部，黃金橢圓長軸對齊車身底部，穿過輪胎中心點的下方。

下面為第二道黃金橢圓包住車身側面，該橢圓與前輪外弧及後輪內弧相切，其長軸又與前後輪胎相切。



# 設計幾何學：美學與實用





# 作者金柏莉·伊藍姆

- **生物學、幾何學與藝術**，都分屬於不同的教學科目，彼此內容重複的部份，通常也最容易被忽視，因此學生往往被迫得自行連結這些學問之間的關連性。
- 尤其在藝術與設計的課程裡，教學往往著重於自覺的行為與個人靈感的表現，而忽略上述的關連性，乃至於**很少有老師會將生物學或幾何學帶進畫室；也很少有老師會將藝術學或設計學帶進科學或數學教室。**
- 《設計幾何學》一書，便是我為視覺設計系的學生整合設計學、幾何學、生物學等課程的初衷，所產生的結果。

- 《設計幾何學》的撰寫初衷，並非企圖以幾何學原理將美學量化，而是希望藉由設計過程的觀察，揭示一種生命本質的基礎，也就是在比例、成長模式等多方面所出現類似幾何的「視覺關連」，而通過這種觀察，也讓所有的藝術家或設計師，發現「自己」與「作品」的真正價值。

# $\sqrt{2}$ 與德國DIN

- 矩形作圖與DIN標準紙張比例，對於設計者或數學教師極為有用。
- **DIN**：Deutsche Industrie Normen的縮寫，意即德國工業標準，是以矩形作為紙張尺寸系統的基本規格
- 大部分歐洲海報範例，也都有相同的尺寸比例。
- 它不僅具有減少浪費的功能，同時也有依黃金分割而產生的美學特性。

# 天地明察（小說＋電影＋漫畫）： 十七世紀日本數學家澀川春海的故事



# NUMB3RS vs. The Numbers Behind NUMB3RS



齊斯·德福林 | 蓋瑞·洛頓——著  
蘇俊鴻·蘇惠玉等……譯 洪麗生……審閱·導讀

隱藏在空前成功警匪影集《數字搜查線》背後的數學

21世紀必備的數學素養

文学の部屋

博士の愛した数式

# 博士熱愛的 算式

博士只有八十分鐘的記憶，一旦超過這時間，  
他的記憶就自動歸零，重新開始。  
然而博士卻用一個簡單的數學公式，驗證了愛的永恆。

小川洋子 著

王蘊潔 譯

PRS-G1/PRS-T1  
プラインストール  
コンテンツ

# チェスに潜む広大な宇宙

～美しきものを追い求めて～

インタビュー：小川洋子

小川 洋子

写真／為広麻里

# 歐拉公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



# 歐拉紀念郵票



## 《博士熱愛的算式》：我＝管家

- 我重新看著博士的紙條。永無止境循環下去的數字，和讓人難以捉摸的虛數畫出簡潔的軌跡，在某一點落地。雖然沒有圓的出現，但來自宇宙的 $\pi$ 飄然地來到 $e$ 的身旁，和害羞的 $i$ 握著手。他們的身體緊緊地靠在一起，屏住呼吸，但有人加了1以後，世界就毫無預警地發生了巨大的變化。一切都歸於0。
- 歐拉公式就像是暗夜中閃現的一道流星；也像是刻在漆黑的洞窟裡的一行詩句。我被這個公式的美深深地打動了，再度將紙條放進票夾。
- 走下圖書館的樓梯時，我回頭看了一下，數學書籍區仍然沒有一個人影，一片寂靜，沒有人知道那裡隱藏著多麼美的事物。

# 小川洋子如何敘事

- 上帝筆記本 (pp. 57-61)
- 造物主創造了數字。(p. 31)
- 針對管家問他數論研究是發現正整數之間的關係嗎？博士回答：「沒錯**是發現，不是發明**。我要找出在我還沒有出世的遙遠過去，就已經不為人知地在某個地方存在的定理。就好像一字一句地抄下記錄在**上帝筆記本**中真理一樣。誰都沒有辦法預知這本筆記本到底在哪裡，什麼時候會打開。
- 在我想像的世界中，宇宙的造物主在遙遠的天際編織著蕾絲。是用上等真絲編織的，可以穿透任何微弱光線的蕾絲。**只有造物主知道蕾絲的圖案，誰都無法搶走，也無法預測下一個圖案。**」(p. 164)

- **柏拉圖主義**：「我在和數字相愛的時候，你這樣魯莽地闖進來，比偷看人家上廁所更沒有禮貌。」（p. 17）
- 我可以感受到自己站著地面是由**更深層的世界所支撐著**，也為此感到驚嘆。唯有**順著數字的鐵鍊前進**，才能進入**深層的世界**，**言語似乎已經失去了意義**。（p. 111）
- 「真正的直線在哪裡？只有在這裡。」博士把手放在胸口，和教我虛數一樣。
- 「**永恆的真實是肉眼看不見的**，也不會受到物質、自然現象和感情的影響，但數學可以解開真實的奧秘，也可以用數學來表現真實，任何東西都無法阻擋。」（小川洋子，2004，頁153）

# 「意在言外」的體會！

- 小川洋子為何將博士塑造成為柏拉圖主義者？
- 小說家為何如此重視數學洞察力？
- 數學的「真」與「美」之連結如何在小說情節中展現？



數學少女

Mathematical Girls

結城 浩

Hiroshi Yuki

Illustration SDwing

Ching Win Novels

# 結成浩：數學少女

- 無論從漫畫或小說的面向來看，本書都是一本具有紮實數學內容的數學普及書籍，讀者對象當然是高中學生。
- 從「制式的」數學學習觀點來看，本書一點也不討喜，因為它所涵蓋的內容，早已遠遠超出高中數學的範圍。
- 在日本狂賣十一刷，而促成作者結城浩書寫「續編」《數學女孩：費馬最後定理》。
  
- 本書的賣點何在？
- 「數學＋小說」？
- 「數學＋青春美少女」？
- 結城浩所傳達的數學想像：「我對數學的『憧憬』—和男孩對女孩抱持的情感在某些地方有點相似」？

# 結構面向反思

- 如康托爾所說『**數學的本質是自由**』，尤（歐）拉老師是自由的，他將無限大或無限小的概念靈活運用在自己的研究上，無論是圓周率的 $\pi$ ，虛數單位的 $i$ 或是自然對數的底 $e$ ，都是尤拉老師開始使用的（符號）文字，**老師在當時無法橫渡的河上架了一座橋**，就像在柯尼斯堡上架設新橋一樣。





日本暢銷科普及作家

結城浩 | 著

前國立台灣師範大學數學系教授兼主任

洪萬生 | 審訂

鍾霓 | 譯

# 數<sup>+</sup>學<sup>||</sup>(女<sup>×</sup>孩)

「費馬最後定理」

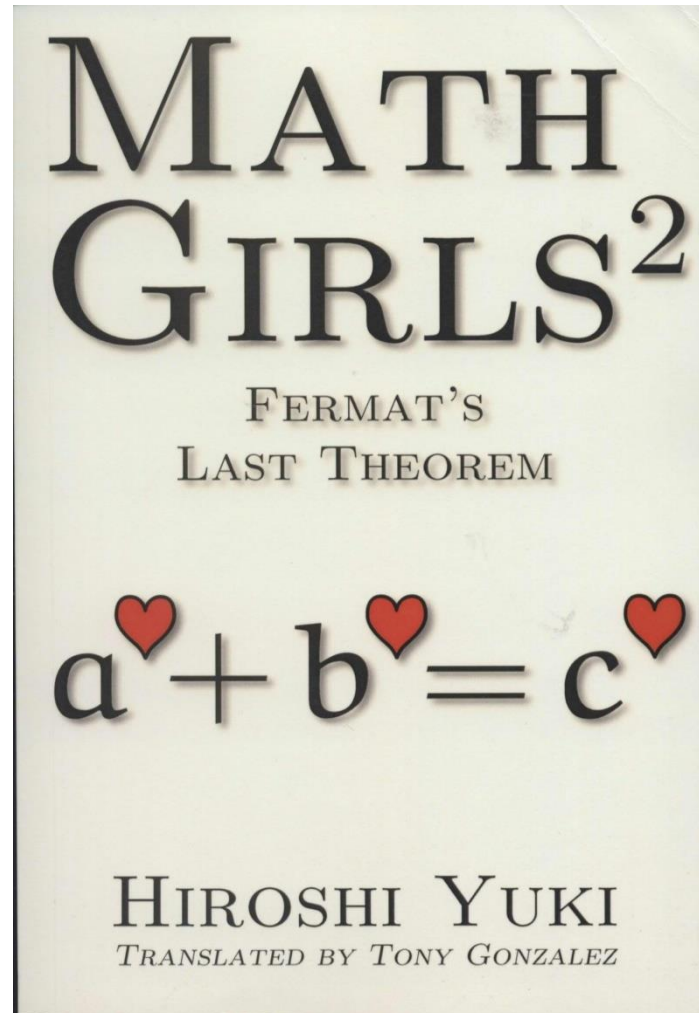
## 最受日本中學生 喜愛の青春物語



將浩瀚的無窮宇宙放在掌心上，從畢氏定理、互質、反證法、  
可以分解的質數、交換群的眼淚、視變型為模數、無窮遞減法所演繹出的一個更神秘而美妙的證明！

在放學後的圖書館，知性的學長、神秘的才女、開朗活潑的學妹、天真爛漫的表妹，  
懵懵懂懂的情懷，交織出最閃亮的青春歲月……一切的一切，都是從那個星期六的午後開始……

# 《數學女孩：費馬最後定理》 英文版



# 數學子女孩

Mathematical Girls  
Fermat's Last Theorem

費馬最後定理

原作 結城浩  
Hirosaki Yuki

漫畫 春日旬  
Spring Kaanga



TONG LI COMICS

1

# 《數學女孩：伽羅瓦理論》



初人情節＋生動人物＋深入解說＋適合閱讀  
—日本最受歡迎、高中生必讀、數學小說 第四彈！

把最愛上數學的瞬間時刻！

獲選為「2015年最受歡迎的書籍」，榮獲「2015年最受歡迎的書籍」獎。  
榮獲「2015年最受歡迎的書籍」獎。  
獲選為「2015年最受歡迎的書籍」，榮獲「2015年最受歡迎的書籍」獎。



# 最佳第六數： $\phi$

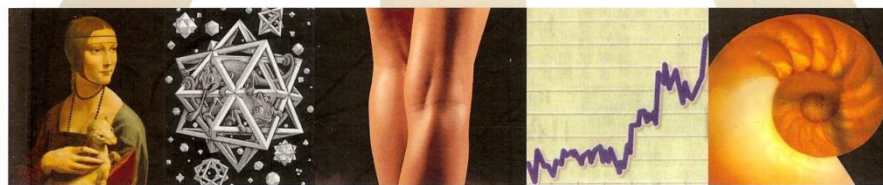
- NBA 最佳第六人
- 1, 0,  $\pi$ , e, i,  $\phi$
- 《黃金比例》
- 《數學與蒙娜麗莎》
- 《達文西亂碼》

*The Golden Ratio*

# 黃金比例

1.61803……的祕密

Mario Livio 著 丘宏義 譯



10 大眾科學館



遠流出版公司

時報出版

Math and the Mona Lisa

布倫·阿特列◎著 牛小婧、鄒瑩◎譯

# 數學與蒙娜麗莎

The Art and  
Science of  
Leonardo da Vinci

自然中孕育著美，美存在於宇宙的秩序之中，成為科學家和藝術家永無止境的追尋；藝術之美與科學之美，在達文西的作品中交會，大放異彩；為後世揭開自然界運行不停的數學法則。

暨南大學資訊工程系教授·作家 李家同 實踐大學時尚&媒體設計研究所教授·藝評家 陸蓉芝 | 聯合推薦

# 本校林芳玫老師的現身說法！





# 數學小說：一種新興文類

- 數學小說成為一個全新的文類（genre）：  
科普作家（含專業數學家）開始融數學的「真」與「美」為一體，與讀者分享有趣的認知活動之外的數學知識之美。
- 這種跨兩門文理學科極端的連結，即使在西方歷史上也相當罕見。
- 左端＝數學，右端＝文學，緊握兩端，遊走中間！

# 數學小說 vs. 歷史小說

- 《蘇菲的日記》 (*Sophie's Diary*) :
- 作者 Dora Musielak 虛構蘇菲·熱爾曼 (Sophie Germain, 1776-1831) 在法國大革命巴黎圍城五年期間的日記
- 蘇菲是十八世紀法國自修成才的偉大女數學家
- 《灣生回家》的殷鑑！



# 蘇菲的日記

*Sophie's Diary*  
A Mathematical Novel

Dora Musielak

著

洪萬生

洪贊天

黃俊璋

合譯

洪萬生

審訂

1791年8月19日 週五

我對於如何證明有無限多的質數已感到驚訝。

歐幾里德選這一問題並且加以證明。

他最先假設只存在有有限個質數。

然後，證明這個敘述是假。

這個證明如下：


假設只有有有限個質數 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 。

則 $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$ 不會被任何一個 $p$ 所整除。

因此，它的任何一個質因數會產生一個新的質數。

歐幾里德考慮 $n=3$ 的情況。

正如他一樣，我可以證明 $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + 1$ 不會被任何一個 $p$ 所整除。

 三民書局



# 卡巴列夫斯基 (1850-1891)

- 十九世紀俄羅斯的偉大(女)數學家
- 如何協調「數學的理性」vs.「文學的感性」
- 我瞭解你們會覺得奇怪，為什麼我能一邊忙文學，一邊搞數學。很多人由於從來沒有機會通曉更多的數學，都把數學和算術弄混在一起，而認為它是一門枯燥乏味的科學。事實上，它倒是一門需要大量想像力的科學呢。
- 本世紀一位數學家領袖就曾非常正確地陳述這種情形。他說：要成為數學家，不可能不是心靈上的詩人。當然，為了領悟這個定義的精確性，我們必須拋棄古代人那種認為「詩人總是無中生有，且發明與想像乃是同一回事」的偏見。
- 對我來說，詩人只是感知了一般人所沒有感知到的東西，他們看的也比一般人深。其實數學家所做的，不也是同樣的事？

- 就我自己來說吧！我這一輩子始終無法決定，到底哪個偏好較大些，是數學呢？還是文學？只要我的心智逐漸為抽象的玄思所苦，我的大腦就會立即偏向人生經驗的省察，偏向一些美好的文藝作品；反之，當生活中每一樣事開始令我感到無聊而提不起勁的時候，只有科學上那些永恆不朽的律則，才能吸引我的興致。
- 如果我能心無旁騖地專注於一門科學，我應該可以在這一門上超越目前的水準，然而，我卻不能完全地放棄這兩項中的任何一門。
- 前述數學家領袖被認為是柏林學派大師外爾斯特拉斯
- (Karl Weierstrass)，她的師父！



Sofya Kovalevskaya in the 1870s

# 《太多幸福》

- 短篇小說＋歷史小說＋數學小說
- 作者：2010年諾貝爾文學獎得主、加拿大作家艾莉絲·孟若 (Alice Munro)
- 索菲亞·柯巴列夫斯基 (Sophia Kovalevsky) 傳記的小說版



# 數學詩

- 嚴格說來，此一文類之比喻重於敘事。
- 曹開（白色恐怖受害者）《小數點之歌》
- Marion Cohen, *Crossing the Equal Sign*.
- 蘇俊鴻（北一女數學教師）（合作者國文老師陳麗明），〈詩數列車〉

# 曹開：〈零與圓〉

- 欲究人生圓或零
- 他畫個圓，你看成零
- 你畫個零，他看成圓
- 真是通達玄妙
- 
- 有人從圓中
- 滾進零裡
- 有人從零內
- 鑽入圓中，愈思量愈莫名
- 
- 圓看零非虛懷
- 零看圓非完美
- 圓笑零，零笑圓
- 是非虛實並列交融
-

- 圓成零，零變圓
- 相因相成，互相對應
- 恰似魔圈佛環渾圓
- 密切聯鎖不停
- 
- 圓零圓，零圓零
- 連串滿天吉凶星斗
- 把那難說盡的想像
- 推演奧妙無窮

# 〈小數點的詩觀〉

- 人類的生存從太陽的光
- 得到最純粹的快樂
- 而心靈從數學
- 得到清澈的照亮
- 
- 這兩種事情
- 一是靈動的線條的考量
- 那是眼見的舒服
- 另一是數理的精明
- 那是心的達觀快悅
- 
- 我自從心裡有數以後
- 總覺得應該有人出來寫有人間性
- 有人情味，深入淺出的數學詩
- 所以獨創這一條人生方程式的路途

# 小數點之歌

曹開數學詩集

曹開 著  
呂興昌 編

我一再的認證  
我是人間方程式裡  
最卑微的小數點  
原無意投生在紛雜的函數中

你不必介意  
更無須憐憫  
你堅持你的算法  
我維護我的向量

用四捨五入的定律  
把我歸納留存也不錯  
將我犧牲拋棄也無不對  
在這加減乘除的公式中

# Crossing



## the Equal Sign

Marion Deutsche Cohen

# Eureka!

- Eureka!
- Pretty Eureka!
- Pretty Eureka with sugar on top!
- I have read the signs.
- I have broken the code.
- 
- I collected my lemmas from every port and brought them on board.
- I brought them to my country.
- I see the scene, I see the act.
- I have not solved the cosmos but I have solved this house.
- Most of infinity is still unsolved but I have this picture.
- I have this brain.

# 跨界與博雅

- 科學家票戲、下圍棋、玩電動、寫武俠小說或者開畫展？
- 通識教育的博雅期待：培養一種有能力分享跨界活動的經驗。
- 數學小說、數學家或藝術家的真情告白、數學普及作品乃至數學詩等所隱含的數學知識活動（求真），也可以按很文學的方式來呈現（求美）。



# 結語：如何體會數學的真與美

- 數學的真與美如何連結？
- 由於真理「底蘊特性」的體會，而領會到數學知識的美
- 反之，如何經由數學（公式、定理）的美，被啟發而進一步認識到其所以為真？
- 閱讀與敘事就是打開數學知識活動的另一面向，值得我們在「數學閱讀時代」好自為之！

# MTM

- 台灣數學博物館 (Museum of Mathematics @ Taiwan) : <http://mathmuseum.tw/>

